

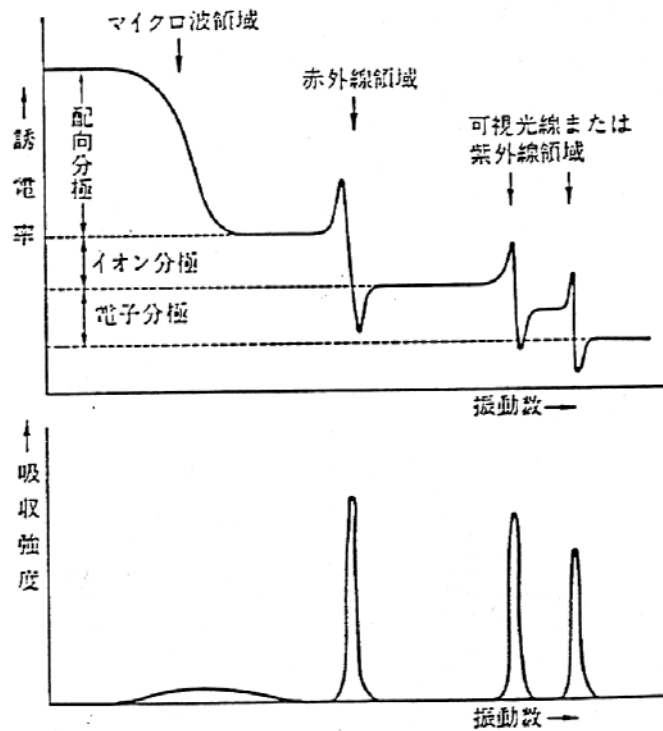
電子レンジは何を揺すするのか？

名古屋市立富田高校

飯田 洋治

はじめに

電子レンジの周波数は2450MHzのマイクロ波($\approx 10^9$ Hz、波長 $\approx 10^{-1}$ m)。これが水の分子を振動させ、熱運動に変えているというが、どうも変だ。分子構造を決めるのに赤外線吸収という方法を使うが、その周波数は $\approx 10^{12}\sim 10^{14}$ Hz、($\approx 10^{-4}\sim 10^{-6}$ m)で、マイクロ波の千倍から10万倍も振動数が高い。明らかに大きく桁が違う。「こんな低い周波数で水の分子を振動させられるのか?」。そんな素朴な疑問から、いろいろ専門書を調べたが数式だらけでチンプンカンプン。そこでいろいろな量を初等的なオーダー計算で見積もってみた。下図のグラフは大変たよりになった。



『物性論』馬渡達美著 187.

4-8 図 誘電分散と電磁波の吸収.

(1) 常温における結晶中の原子の格子振動とイオン分極の振動数の見積り

結晶中の原子が常温で単振動をしているものとして、そのエネルギーが分子の熱運動のエネルギーに等しいとしてみよう。

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = 2\pi^2 m n^2 A^2 = k T \quad \dots\dots\dots ①$$

T = 300K。ボルツマン定数 k = 1.38 × 10⁻²³ J/K

Aは振幅。この場合は原子間の距離で A ≈ 10⁻¹⁰ m

mは質量。ごく普通の原子は水素原子の10倍程度だとすれば、m ≈ 10⁻²⁶ kg

これらの値を入れて、振動数nがだいたいどれくらいかを見積ると

$$n \approx 10^{12} \text{ Hz} \quad (\approx 10^{-4} \text{ m})$$

これは赤外線の中でも波長の長い遠赤外線のあたりの振動である。

この振動数は別の角度から、出すことができる。

格子にイオンが配列しているとすると、電場をかければ分極する。《イオン分極》電場をとりされば単振動を始めるに違いない。復元力の原因がクーロン-ポテンシャルだとすると、次の式が成立つ。

$$\frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 A} \quad \dots\dots\dots ②$$

e ≈ 10⁻¹⁹ C, ε₀ ≈ 10⁻¹¹ F/m A ≈ 10⁻¹⁰ m m ≈ 10⁻²⁶ kg

とすると、

$$\omega \approx 10^{14} \text{ s}^{-1}, \quad n \approx 10^{13} \text{ Hz}$$

となって、上の結果と一致する。

ついでに、常温におけるkTの大きさを見積っておこう。

$$k T = 1.38 \times 10^{-23} \times 3.0 \times 10^2 = 4.14 \times 10^{-21} \text{ J} = 2.59 \times 10^{-2} \text{ eV} = 1/40 \text{ eV}$$

(2) 電子分極の振動数の見積り

中性の原子に電場をかければ、原子自身が陽子と電子に分極する。《電子分極》この時もイオン分極と同じ式が成立つ。ただ、イオンの質量mが電子の質量m_eに変る点だけが異なる。つまり質量が1万倍程度軽くなる。

$$\frac{1}{2} m_e \omega^2 A^2 = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 A} \dots\dots\dots ③$$

$m_e \approx (10^{-4}) \times 10^{-26} \text{kg}$ そのため、

$$\omega \approx 10^{16} \text{s}^{-1}, \quad n \approx 10^{15} \text{Hz}$$

となつて、この振動数は紫外線に相当する。

つまりイオン分極、電子分極ともに、それに見合った赤外線、紫外線を一番共鳴吸収しやすいわけで、上のグラフはそのことをあらわしているわけだ。

(3) 水のような極性分子の誘電分極では 《配向分極》

水のような分子はそれ自身が分極して、固有の双極子モーメント $p = q l$ をもっている。(q 電荷、l 距離)

電場 E の中に、この極性分子を入れると、安定な位置から最も不安定な位置までの位置エネルギーの差 U_p は

$$U_p = q l E \dots\dots\dots ④$$

この大きさを見積ってみよう。
q はほぼ電子の電荷のオーダーで、l はほぼ原子間の距離に等しい。

$$q \approx e \approx 10^{-19} \text{C}$$

$$l \approx A \approx 10^{-10} \text{m}$$

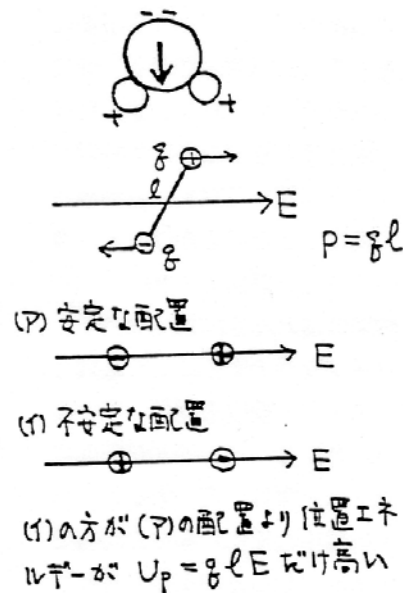
電場の強さを $E \approx 10^4 \text{V/m}$ とすると

$$U_p \approx 10^{-25} \text{J} \approx 10^{-6} \text{eV}$$

これは、常温の分子の熱運動のオーダー $kT \approx 10^{-21} \text{J} \approx 10^{-2} \text{eV}$ に対して 1 万分の 1 にすぎない。だから変動する電場をかけたとき、これに追従する極性分子の振動のエネルギーオーダーは最大でも熱運動の場合の 1 万分の 1 程度だろう。だから、①式を参考にして、その振動数は格子振動の場合の 100 分の 1 ほどになる。

$$n_p \approx 10^{10} \text{Hz} \quad (\approx 10^{-2} \text{m})$$

これは、ちょうどマイクロ波の領域になることがわかる。

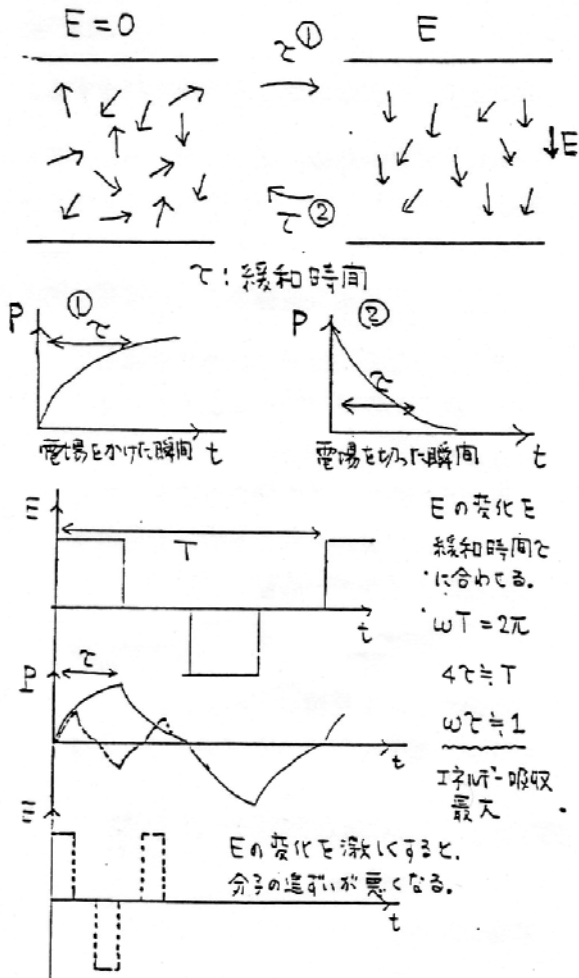


(4) マイクロ波で水分子はどう動くか

それにしても、電子レンジの周波数はまだ低い($\approx 10^9\text{Hz}$)。どうもイオンや電子の誘電分極の場合の共鳴吸収とは異なる原理が働いているに違いない。

常温では水のような極性分子はすでにランダムな熱運動をしている。だから、トータルとしてみると誘電分極は起きていない。ところが、これに電場をかけると、電場にそって極性分子が並び始める。しかし、分子には慣性があるし、他の分子の妨害もあって、多くの分子が並んでくるには時間がかかる。逆に、かけた電場をきれば、並んだ分子がバラバラになるにも時間がかかる《緩和時間》。右図参照。

変化する電場をかけると、ゆっくりした変化であれば、緩和時間はほとんど問題にならず、分子は電場の変化によく追従し、エネルギー吸収も問題にならない。ところが緩和時間が問題になるほど激しく変化すると、分子は電場の変化に数々の妨害を押切ってなんとか追従できる程度になる。(この時、誘電率は急速に小さくなる。エネルギー吸収最大。その時の水の周波数は $10\sim 30 \times 10^9\text{Hz}$ だという) それ以上激しく電場が変化すると、もはや分子は全く電場の変化に追従できなくなってしまう。この時は分子は電場の影響をうけず、エネルギーは通りぬけてしまうというわけである。



'91.2.17.

参考文献 『電気物性論入門』 A.J.DEKKER 酒井、山中訳 丸善
『物性論』黒沢達美 裳華房

続 電子レンジは何を揺するのか？

名古屋市立富田高校 飯田 洋治

電子レンジの議論が始まってから約一ヶ月。ずいぶんこれにエネルギーを費やした。これまで余りにも数学的で避けていたことが、オーダー計算ないしはイメージで「一体、物質の何が、どんな波に応答するのか」と見ていくと、つぎつぎと物質の階層構造が浮き彫りにできそうで、新しい世界がどんどん広がっていきそうだ。このあたりのことは小川さんが書いてくれるはず。

一方、石川さんは変動する電場をかけたとき、配向分極の誘電率の低下をイオンの内部電場による固有振動を前提に説明しようとしている。直感的には「イオン分極も配向分極もゴッチャになっている」と思った。しかし、この冒険的試みはその前提は間違っていると思うが、それをそっくりそのまま極性分子の熱運動に置き換えてやると、大変うまく誘電分散などが説明できそうなので、自分なりにいろいろ検討してみた結果を報告する。

(1) 極性分子の回転エネルギー

常温の液体や気体の極性分子は外部電場がなければ、ランダムな熱運動をしており、回転にもエネルギー等分配がされているものと考えられる。

$$E = \frac{1}{2} I \omega_0^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 = \frac{1}{2} k T \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

I は双極子の慣性モーメントで $I = m A^2$

A は腕の長さで、 $A \approx 10^{-10} \text{m}$

m は双極子の質量で、水素原子の10倍程度とする。 $m \approx 10^{-26} \text{kg}$

T = 300K. ボルツマン定数 $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{J/K}$

ω_0 : 平均回転角周波数

これらの値を入れて、平均回転角周波数 ω_0 がだいたいどれくらいかを見積ると

$$\omega_0 \sim 10^{12 \sim 13} \text{ s}^{-1} \quad (\omega_0^2 \sim 10^{25} \text{ s}^{-2})$$

これは前回 (1) で見積った値と同程度のもので、イオン分極の固有振動数 $\approx 10^{14} \text{ s}^{-1}$ より1桁小さい値だ。果たして、この ω_0 が極性分子の固有の回転運

動（固有振動）といえるかどうかはいろいろ疑問が出るに違いない。しかし、それに相当するものがあるとして話を進めよう。

(2) 変化する電場による強制振動の運動方程式

平均 ω_0 の回転を含むランダムな運動をしている極性分子に、変化する電場 $E = E_0 \cos \omega t$ をかける。

すると極性分子はまわりの極性分子の抵抗を受けて1回転はおろかほんのわずかな回転（振動）しかしなないに違いない。その変位を x とする。

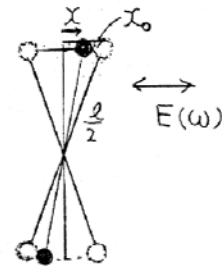
外部電場が極性分子を一方向に並べようとするのにたいして、それを元のランダムな運動に戻そうとするのは分子の熱運動である。単振動でいえば明確に復元力 $-kx$ が働くのだが、それになぞらえてまわりの分子の熱運動が $-m\omega_0^2 x$ の復元力に相当する力を及ぼすものとしよう。

分子が動けば、まわりの分子から抵抗をうける。速度に比例する抵抗であれば、比例定数を γ として、

$$-m\gamma \dot{x}$$

結局、上のように極性分子の運動を解釈しなおすと、つぎの強制振動の運動方程式が使える。

$$m\ddot{x} = -m\gamma \dot{x} - m\omega_0^2 x + q E_0 \cos \omega t$$



ここからは石川さんや専門書がやっている計算と同じことをすればいい。右の□。

ここで、 x_0 は変動する外部電場によって新たに生ずる平均的微小回転（振動）の変位の振幅である。熱運動の変位とは異なることに注意を要する。だから x_0 が大きければ分極も大きくそれだけ誘電率も大きくなるわけで、誘電率の変化を調べることは x_0 の変化を調べることに帰着する。

$$m\ddot{x} = -m\gamma \dot{x} - m\omega_0^2 x + q E_0 \cos \omega t \quad \dots \textcircled{2}$$

(1) 複素数 $E = E_0 e^{i\omega t}$ (実数部が $E_0 \cos \omega t$) に対して

$$x = \tilde{x}_0 e^{i\omega t}$$

という応答があるとして②式に代入して整理すると

$$\tilde{x}_0 = \frac{q E_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} &= \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} \left\{ \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} - \frac{i\omega\gamma}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} (\cos \delta - i \sin \delta) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} e^{-i\delta} \end{aligned} \right]$$

$$\therefore \tilde{x}_0 = \frac{q E_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} e^{-i\delta}$$

(3) 配向分極

電場 E_0 の中に、1 コの極性分子 (q 電荷、 l 距離) を入れたときの位置エネルギー U_p は

$$U_p = q l E_0 \quad \dots\dots\dots ⑦$$

この大きさは、 E_0 の大きさにもよるが、 $E_0 \approx 10^5 \text{V/m}$ (前回は 10^4V/m とした)

$$q \approx e \approx 10^{-19} \text{C}$$

$$l \approx A \approx 10^{-10} \text{m}$$

として

$$U_p \approx 10^{-24} \text{J}$$

この値は他の分子の妨害がない条件のもとでの最大値である。

実際には、他の極性分子が運動を妨げるので、変位は、最大でも振幅 x_0 までで、熱運動がこれを引き戻す。この引き戻しのエネルギーを弾性エネルギー相当分で表わせれば $\approx m \omega_0^2 x_0^2$ である。

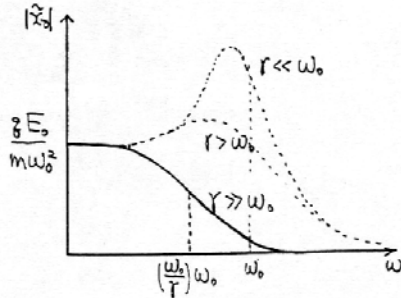
$$U_p' \approx q x_0 E_0 \approx m \omega_0^2 x_0^2 \quad \dots\dots\dots ⑧$$

$$\therefore x_0 \sim \frac{q E_0}{m \omega_0^2} \sim 10^{-13} \text{ m}$$

つまり回転に基づく振動の振幅 x_0 は原子間距離の千分の1程度という大変小さなものだということがわかる。

$$\therefore |\hat{x}_0| = \frac{\delta E_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}} \quad \dots\dots\dots ③$$

(2) x の振幅 $|\hat{x}_0|$ は ω に依存し、 γ の大きさによって図のようなグラフがえられる。

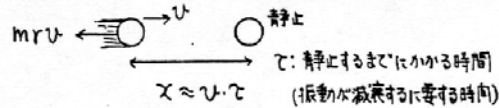


(3) 水のような極性分子では、他の分子の熱運動によって大きな抵抗をうけるので $\gamma \propto \omega_0$ 。実線のグラフになると考えられる。

(4) このグラフの ω_0^2 / γ は緩和時間 τ の逆数である。これは石川さんの指摘するとおりで、次のように示せる。

$$\frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 (= \frac{1}{2} m v^2) = m \gamma v \cdot x$$

(弾性E相当分) (止まるまでに抵抗力がする仕事)



$$\therefore \tau \approx \frac{\gamma}{\omega_0^2} \quad \dots\dots\dots ④$$

(5) ③式は、④と $\omega \ll \omega_0 \ll \gamma$ を考慮すると

$$|\hat{x}_0| \approx \frac{\delta E_0}{m \omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \approx \frac{\delta E_0 A^2}{k T} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \quad \dots\dots\dots ⑤$$

①式で表れる

(6) と同様、1 コの双極子は $q x_0$ だけ分極し、単位体積当り N コあれば、分極 P は、

$$P = N q x_0$$

誘電率 $\epsilon \gg \epsilon_0$ (真空中の誘電率) とすると

$$\epsilon = \frac{P}{E_0} \approx \frac{N \delta^2 A^2}{k T} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \quad \dots\dots\dots ⑥$$

そこで、この場合の双極子の位置エネルギーは

$$U_p' \sim q x_0 E_0 \sim (10^{-18})(10^{-13})(10^5) = 10^{-27} \text{ J} \sim 10^{-9} U_p$$

つまり、双極子がお互いに他の運動を妨害する状況のもとでは、双極子の位置エネルギーも抵抗のないときに比べて千分の1程度減少する。

(4) 変動電場で振幅(誘電率)が急に小さくなる条件

ここまでは、単純なオーダー計算で見積りしてきたが、ここからは□の中の計算結果を使うことにする。

⑤式より、振幅 x_0 (または誘電率 ϵ) が急に小さくなる場所は、 $\omega\tau = 1$ の前後、ちょうど $\omega = \omega_0^2/\gamma$ のあたりである。前回の緩和時間を使った図を参照。

水の誘電率が急に下がる場所は実験的に 10^1 Hzあたりのところであるから

$$\omega \approx 10^{11} \text{ s}^{-1} \quad \tau \approx 10^{-11} \text{ s} \quad \omega_0 \approx 10^{12 \sim 13} \text{ s}^{-1} \quad \gamma \approx 10^{14 \sim 15} \text{ s}^{-1}$$

これは、前提は違うが石川さんの結論とほぼ一致する。

(ア) 水の誘電率を見積もる

⑥式で $\omega = 0$ とすれば、静電場中の誘電率が求まる。温度が上昇すれば誘電率が下がることもこの式から容易に推測できる。石川さんのように固有振動に相当する部分を内部電場に求めると、誘電率の温度依存性が説明できなくなる。ただこの式はオーダーのみを問題にしているもので、正確なものを求めようとすれば、これに液体中の双極子の内部電場の影響などを考慮する必要があるだろう。

$$\epsilon \doteq \frac{N q^2 A^2}{k T} \frac{(10^{28}) (10^{-10})^2 (10^{-10})^2}{(10^{-23}) (10^2)} = 10^{-9} \text{ F/m}$$

ここで、 N は 1m^3 あたりの分子数であり、水 1g 当り 3×10^{22} の分子を含む。

$$\text{比誘電率は } \epsilon/\epsilon_0 \approx 10^2$$

$$\text{但し } \epsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

水の比誘電率は常温で約80、メチルアルコールは約34であり、オーダーとしては大変よい値だ。

もし仮に、 $\omega_0 \approx 10^{14} \text{ s}^{-1}$ (イオン分極)として、誘電率を求めると

$$\varepsilon \doteq \frac{Nq^2}{m\omega_0^2} \frac{(10^{28})(10^{-18})^2}{(10^{-28})(10^{14})^2} = 10^{-12} \text{ F/m} \quad \varepsilon/\varepsilon_0 \approx 10^{-1}$$

これは、現実には合わない値だ。

(イ) 疑問1 発熱量の見積り

石川さんの指摘通り、分子1個当りの発熱量は抵抗 $m\gamma \dot{x}$ に \dot{x} を掛けたもの (但し $x = x_0 \sin \omega t$) なので、

$$m\gamma\omega^2 x_0^2 \approx (10^{-26})(10^{14 \sim 15})(10^{11})^2(10^{-13})^2 = 10^{-15 \sim -16} \text{ W}$$

$$\text{一方、} q x_0 E_0 \omega \approx (10^{-18})(10^{-10})(10^5)(10^{11}) = 10^{-16} \text{ W}$$

どちらから求めてもほぼ同じ値が得られる。

$$1 \text{ モルあたりでは } (10^{24})(10^{-15 \sim -16}) = 10^{8 \sim 9} \text{ W}$$

この値はちょっと大き過ぎる。なぜなら、通常の電子レンジでコップ一杯 (10モル) の水を沸騰させるのに約1分かかるとすると、1モルあたり $\approx 10^2 \text{ W}$ のエネルギーを消費する。多分、実際の電子レンジのマイクロ波は2450MHz ($\omega \approx 10^{10} \text{ s}^{-1}$) と1桁小さいこと、振幅 x_0 がもっと小さくなるとか、多くのロスがともなうことが考えられるが、誰かこのオーダーの違いを説明してほしい。

(ウ) 疑問2

⑧式を出したとき、これだけの双極子のエネルギーを、変動する電場 E をかけて双極子の回転 (ω) でまかなうものとして

$$U_p' \approx q x_0 E_0 \approx m \omega_0^2 x_0^2 \approx m \omega^2 A^2 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

とおき、これから ω を求めてみた。

$$\omega \approx \left(\frac{x_0}{A} \right) \omega_0 \approx 10^{-3} \omega_0 \approx 10^{8 \sim 10} \text{ s}^{-1}$$

もちろん、これはマイクロ波のオーダーだが、電子レンジの角周波数 $\approx 10^{10} \text{ s}^{-1}$ よりわずかに小さくなる。そもそもこのように考えることが間違いなのかどうか、又は x_0 、 E_0 の大きさに見積りの誤りがあるのかどうか、誰か教えてもらえると嬉しい。

1991.3.20.