

7. 向きを変える力と慣性運動の直線性

驚くほど出来が悪い問題 「振れている振り子の最下点で、糸の張力 T と重力 W はどちらが大きいか」という問題〔問題 5〕(p. 273) を高・大学生に行った調査の結果を示そう。糸の張力 T と重力 W はつりあっていると答えた大学生は実に84%にもものぼる。正解は $T > W$ である。正解だった大学生は、わずか13%にしかすぎなかった。高校生 (15%) より出来が悪い。どうしてこんなに出来が悪いのであろうか。大学生がこれほど間違えるのだから、高校で受けた力学教育はどこかに根本的に欠陥があったとしか考えようがない。

同様に、「等速円運動している物体に働く力」を聞いた問題〔問題 6〕(p. 274) の調査結果はやはり、大学生でも正解は 4 割程度でしかなかった。高校生にいたっては171名中正解者は 1 人もいなかった。高校生の間違いの圧倒的多数は等速円運動をしている時、進行方向への力が働いていると考えたためである。(ア) (イ) (ウ) (エ) を選んだ高校生は 9 割を超えている。さらに、8 割以上の高校生が中心から外向きの力が働いていると考えているのである (ア, イ, オ, カを選んだもの)。大学生でも、4 割近くが進行方向の力と外向きの力があると答えた。

このようなタイプの問題にたいして、彼らが誤った判断を下すのは主に次のような判断に基づくからであろう。

(I) 「車がカーブするときは必ず遠心力が生じる」：この言葉は身近な乗り物の経験からあまりにも常識化している。確かに車の中にいる人は遠心力 (慣性力) を感ずるが、彼らはこの慣性力をどこから見るかに関係なく、曲線運動をするものには必ず付随して生じる力だと判断してしまう。これが加速度系にのみ生じる力だとは考えないのである。

(II) 「釣り合ったままカーブする」, 「等速円運動には加速度はない」：彼らがこう考えるのは、円運動などの曲線運動の形をすでに与えられたものとして判断するからである。「運動の形が力によって形成される」のではなく、「形が原理」になってしまうのである。

(III) 「等速度でも前向きに力が働く」：これはすでに検討済み。

形の原理から形成の原理へ 高校生・大学生のこのような誤りは、「慣性運動の直線性、向きを変える力」が、意識的本格的に教えられていないことを示している。歴史的に見ても、慣性の法則を発見したガリレオ自身がその直線性を明確に把握していなかった。地上での水平運動が直線であっても天体規模に拡大すると、それは円の一部分となる。だから、ガリレオの慣性の法則は天体では等速円運動であった。古代ギリシャ以来、天体の運動を円という“形の原理”によって説明する仕方は全く疑われることがなかった。その点、コペルニクスもガリレオも例外ではなかった。慣性運動の直線性を明確に指摘したのはデカルトである。円という“形の原理”をきっぱりと投げ捨て、惑星運動が直線運動から絶えずずれるのを、太陽からの力の作用によって説明しようとしたのはケプラーであった。デカルト、ケプラーの役割があったからこそ、ニュートンは万有引力の法則の発見ができたのである。このように、ケプラー、ニュートンに至る過程の中には『形の原理』から“形を生み出す原理”の追求^家という重要な飛躍があることに注目したい。まさに、この“形成の原理”を物理教育においてどう本格的に形成していくかなのである。

ニュートン力学における“形成の原理”とは、「運動を変える（運動を形成する）のは力である」（ $F \propto a$ ）ということに尽きる。これを2つに分けて考えると、次のようになる。

「速さを変えるのも力だが、運動の向きを変えるのも力である」。だからこの節では「向きを変える力」に視点を絞り、それでもって“形成の原理”の把握をめざそうというのである。当然、力が働かない時の慣性運動はその直線性に視点を絞るわけである。いままで、このような一点に視点を絞った教え方は全く不徹底であった。

力 { 速さが変わる
向きが変わる

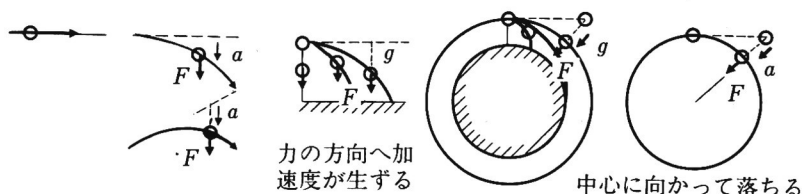
慣性運動 { 速さが変わらない
向きが変わらない

円運動を中心への落下として扱う

力学を習う前の高校生に、「等速円運動

をしている物体は加速度運動をしているか」と聞くと、ほとんどすべてが加速度はないと答える。等速円運動という等速の但し書きに戸惑ってしまう。私自身、高校時代にどうして等速円運動なのに中心向きに加速度が生じるのかピンとこなかった記憶がある。ベクトルを使って中心向きの加速度を導きだすことを習っても、インチキくさくて、どうも心にしっかりとこないのである。放物運動と円運動が同じ原理 $F=ma$ によっておきると習ったはずだが、全く別ものとしてしか理解できず、それぞれの公式をバラバラに覚え込んだ。この問題が一気に氷解したのは、私が教師になってから、「月は地球に落下している」というニュートンの着想を知ってからである。「等速円運動というのは絶えず中心に向かって落下している」と考えればよい。図で示すと下図のように表わすことができる。

(慣性運動) → (放物運動 一向きを変える力 → (月の落下) → (等速円運動)
と加速度)



こう考えると、円運動に中心向きの加速度があるのは当たり前であるし、放物運動と円運動の本質的つながりが見えてくる。天体と地上の物体の運動の区別も必要ない。要は、「向きを変える力と慣性運動の直線性」の視点から「どのように運動が形成されるか」がわかればよいわけである。こうすれば、放物運動や円運動だけでなく、楕円ができたりするのも自然に理解できるようになるであろう。

ここでの授業は、このことで一貫したつもりである。こうすることによって初めて運動の形は形成の原理によってつくられるということが浮きぼりになってくる。 $F=ma$ を使っていきなり放物運動や円運動の特別な形を教えても、私が高校時代に感じた時のように、一向に形を形成する原理の有効性はつかめ

ないように思う。

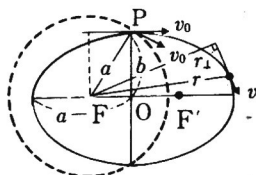
ケプラーの法則　すでに「落下法則のエネルギー論的把握」(P200)で述べたことだが、ケプラーは火星の速さはどうみても一様でない、太陽から遠ざかるほど遅くなるという事実に着目していた。いきなり周期という積分的考えを使わず、刻々変わる惑星の公転速度(v)を太陽からの距離(r)との関係で微分的にとらえようとしたこと、これは形成の論理でとらえることに他ならない。これが円という形の論理をつきやぶった。こうして同一惑星について発見されたのが、第1法則と第2法則、楕円と面積速度一定の法則(角運動量保存の法則)であった。異なる惑星に関する第3法則も、太陽から「遠い星ほど遅くなる」という考えを貫きとおした結果、得られたものである。ケプラーは各惑星を比較するのに、ここでもいきなり周期を比べず、微分的に公転速度を角速度でとらえた。そしてその最大値と最小値を比較した(公転速度が変わるため)ところに第3法則発見のカギがあった。こうして得られたものが

$$r^3\omega^2=c$$

という結果であった。これは $r^3/T^2=c$ ともなるし、平均でいえば $\bar{r}\bar{v}^2=c$ とも書き直せる。こうして発見された第3法則は、エネルギー保存法則を表わす法則だということもできるのである。

ケプラーの第3法則のエネルギー論的位置づけ (楕円運動の場合)

楕円上のP点と同じ速度 v_0 の等速円運動を考える。(中心は楕円の焦点F, 楕円の長半径 a を半径とする円)



面積速度一定の法則より

$$\frac{1}{2} r v = \frac{1}{2} b v_0 = \text{const} \quad (\text{P点})$$

周期 T は

$$T = \frac{\pi a b}{(\frac{1}{2}) r v} = \frac{\pi a b}{(\frac{1}{2}) b v_0} = \frac{2\pi a}{v_0} = T_0$$

F, F' : 楕円の焦点

a, b : 楕円の長・短半径

v : 楕円上の任意の点の速度

r : 動径

$r_{\perp}$: r の v に対する垂直成分

T, T_0 : 楕円上, 円上の周期

故に, 長半径が同じならばどんな楕円 (円を含む) でも周期は同じである。だから長半径 a の楕円の周期 T を半径 a の円の周期 T_0 で置きかえてもよい。

ケプラーの第3法則は

$$T^2 = T_0^2 = \left(\frac{2\pi a}{v_0} \right)^2 \propto a^3$$

$$T = T_0$$

であるので

$$a v_0^2 = \text{const}$$

この式で a は r の平均値 ($\bar{r}$), v_0 は v の平均値 ($\bar{v}$)

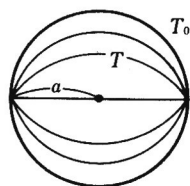
とみなしてよいので,

$$\bar{r} \bar{v}^2 = c \quad (\text{又は } \bar{v}^2 = c / \bar{r}) \quad \dots\dots (A)$$

運動エネルギーとポテンシャルとの一般的関係をあらわすものにビリアル定理があり,

$$U \sim 1/r \text{ なら } \overline{K} = -1/2 \overline{U} \quad (\text{—は平均値})$$

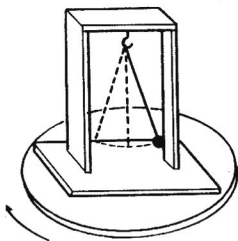
したがって, (A)式はエネルギー法則を表わしていることがわかる。



■ 向きを変える力と慣性運動の直線性の授業

問題 1

ターンテーブルの上に図のような枠をとりつけ、
 上からおもりを糸でつるして振り子にする。今、振り
 子を枠と同じ方向にゆらせておいて、ゆっくりとテ
 ーブルを回したら、振り子の振れる面はどうなるか。

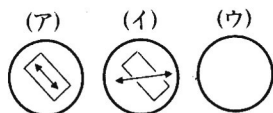


予想 (ア) 枠と同じように振り子の振れ面も動い
 ていく。

(イ) 枠が動いても、振り子の振れる面は変
 わらない。

(ウ) その他

どうしてそう思うか。討論してから実験してみよう。



問題 2

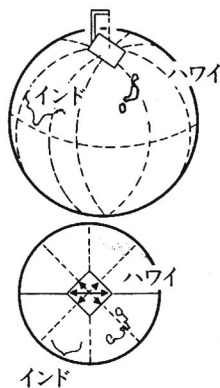
地球の北極に何時間も振れつづけるような振り子をつく
 り、はじめ東京の方に向けて振らせる。3時間ほどたつ
 と、この振り子の振動面はどちらの方向を向いていると
 思うか。

予想 (ア) 振り子はハワイの方に向けて振動する。

(イ) 振り子は中国・インドの方に向けて振動す
 る。

(ウ) 振り子はずっと東京の方に向けて振動す
 る。

どうしてそう思うか討論しよう。



問題 3

ここに、数時間は振れつづけるように工夫した振り子がある。はじめ、真北に向けて振らせた振り子の振動面は30分ほどたつとどうなると思うか。

予想を立てたら、討論をして実験してみよう。

予想 (ア) 振動面は変わらない (南北方向)。

(イ) 上から見ると時計まわりに振動面が変化する。

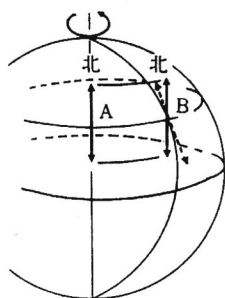
(ウ) 上から見ると反時計まわりに振動面が変化する。

話 1 地球自転の証明—フーコー振り子—

〔問題 3〕の実験を世界で初めてやった人は、フランスの科学者フーコーである。1851年。この実験で初めて地球の自転が証明された。この実験でもわかるように、ものには速さだけでなく、その向きもそのまま一定に保とうとする性質がある。だから、慣性の法則は、正確には、「外から力が加わらない限り、ものはいつまでも同じ速さでまっすぐに運動を続ける (等速直線運動)」ということができる。フーコーはこの慣性運動の直線性を、地球自転の証明に大変うまく利用した。もし地球が自転しているなら、振り子の振動面はいつまでも変わらないのだから、動く地上にいる人にとっては、反対に振り子の振動面がだんだん回転していくように見えるはずである。北極でやれば、1日に1回転するはずである。北極でなくても赤道以外なら少しは回転するはずである。フーコーは、パリのパンテオン寺院のドームに長さ60mの鋼線に直径30cmあまり質量30kgの鉄球をつけた大きな振り子をつるし、静かにゆらせた。たくさんの人々が見守るなか、振り子の振動方向はしだいに時計まわりに回転していった。これは地球自転のみごとな証明だった。

次図を見てみよう。日本 (A 点) で真北に振り子を振らせる。数時間後に自転して B 点にきたとき、振り子の振動面は A の方向と少しも変わらない。B 点での南北は……の方向であり、地上の人から見ると、振り子の振動面は時計まわりに回転していることがわかる。

台風の進路が北半球では右へそれるのも、全く同じ理由である。赤道付近で発生した台風が北上しはじめると、台風は慣性の法則でまっすぐ進む。それを地上から見ると、右へそれていくように見えるのである。振動面、回転面が変わらないという性質は、自転車の車輪やジャイロコンパスなど多方面に應用されている。

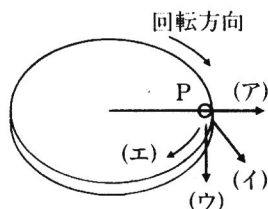


問題 4

図のように、ターンテーブルの上に中心から糸でつるしたおもりがのせてあり、テーブルといっしょに等速で回転している。P 点で糸をカミソリで切ったら、おもりは図の(ア)～(エ)のどちらへ飛んでいくか。

テーブルの外から見ているとする。

予想を立てたら、討論をして実験してみよう。



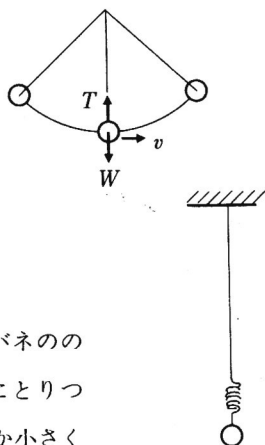
問題 5

図のように振り子が振れているとき、最下点では糸の張力 T と重力 W はどちらが大きいのか。

予想 (ア) $T > W$

(イ) $T = W$

(ウ) $T < W$



〈実験の方法〉 振り子の長さ 1 m ほどにたいしてバネののびが 3～4 cm 程度になるようなバネを右図のようにとりつけ、最下点でバネののびが静止のときより大きくなるか小さくなるかで見分けることができる。バネののびを見分けがつく程

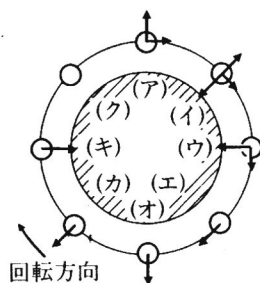
度に小さくし、振り子の長さを長くしないと振動をおこすので注意。

(バネと振り子の共振条件をはずす)

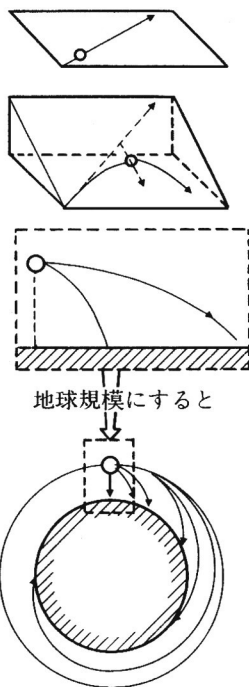
〔問題 6〕

地球のまわりを人工衛星が等速で円運動をしている。

地上からみて、人工衛星に働く力は次の(ア)～(ク)のうちどれが正しいと思うか。



ニュートンは、放物運動を右図のように天体規模に拡大して考えた。つまり、月が地球のまわりをまわるのは、実はリングと同様、月が地球に落下しているためであり、それが地上に落ちてこないのは、地球が丸いためだと考えた。地上のリングの放物運動は重力一つを考えるだけでよいように、月が地球をまわる運動も重力一つを考えるだけでよい。天体の運動も地上の物体の運動も全く同じ法則に支配されているというのである。これが、有名な万有引力の発見であった。リングと月の運動の違いは初速度の違いだけである。だからリングでもどんどん速くしていけば、ついに地上に落ちてこないようになり、人工衛星になるというわけである。さらに速度を増していくと、楕円軌道になり、ついには地球の引力圏を脱出して永遠に地球にもどらないようにな



る。

〈実験〉 エアーテーブルの真中にフェライト磁石を固定して、これと引きあうように磁石を円板にのせていろいろ動かしてみよう。人工衛星のいろいろな軌道が実現するだろう。

話3 等速円運動の場合の加速度と力を求める

短い時間 t の間に、力が働かなければ $A \rightarrow B$ まで vt だけ進むはずのものが、実際は中心向きの力が働くために $B \rightarrow C$ へ x だけ自由落下したと考えられる。加速度を a とすると

$$x = \frac{1}{2} a t^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle ABO$ で、ピタゴラスの定理より、

$$r^2 + (vt)^2 = (r+x)^2$$

r に比べて x は小さいので、 x^2 は省略できる。

$$(vt)^2 = 2rx = 2r(1/2)at^2$$

$$\textcircled{1} \text{ を代入 } \therefore a = \frac{v^2}{r}$$

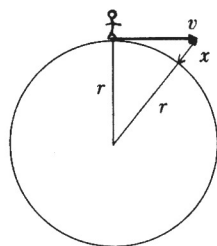
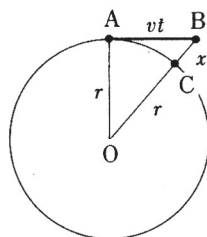
ニュートンの運動方程式 $F = ma$ より

$$F = m \frac{v^2}{r}$$

〔練習問題〕 地上スレスレに、水平に石ころを投げて地面に落ちないようにしたい。どれだけの速度で投げればよいか（人工衛星になる速度）。石ころは1秒間に5m 落ちることを利用するとよい。 $r = 6400\text{km}$ 。

話4 交通安全教室—カーブの曲がり方—

車はカーブする手前でスピードを落とさないと、恐ろしい交通事故につながる。カーブするとき、地面からうける向心力（タイヤと地面のまきつ力）には限度があり、それを超すと、車はスリップしてまっすぐ慣性運動をはじめる。このとき、もうハンドルもブレーキもきかない。ただ法則通りまっすぐ人や建物などに突っ込むだけである。こうした事故は暴走運転や雪道でのカーブでお



きやすい。すでに、「速度が2倍になると4倍すべって止まる」(制動距離)ということを知ったが、カーブを曲がる場合も「速度が2倍になれば4倍曲がりにくくなる」し、急カーブになればそれだけ曲がりにくくなる。速度が2倍になると、「止まりにくさ」も「曲がりにくさ」も単純に2倍になると思う人がいたら、それはとんでもないことである。車は物理法則通りに動く。だからカーブの手前でスピードを落とすこと、これが安全運転の秘訣である。

電車など、カーブではレールの外側を高くして向心力を得るための特別な工夫がしてある。自転車でカーブするとき、内側に傾けて曲がるのも向心力をうるためである。

話 5 円をすてて楕円へーケプラーの3法則ー

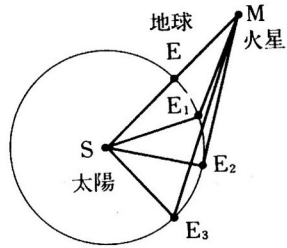
ガリレオやケプラーの時代には、火星の明るさの変化、金星の満ちかけ、惑星の公転周期など、コペルニクスの地動説を支持する多くの決定的証拠があがってきたが、残念なことに、コペルニクスの地動説より天動説の方が実際の観測によく一致していた。(天動説は実際の観測にあうように次々と周転円をつけ加えていったのだから正確なのは当然である)

こうしたコペルニクスの地動説にたいして、地動説が間違っているのではなく、円運動の仮定が間違っているのだということを指摘したのはケプラーであった。「天体の運動は円運動がふさわしい」という考えを、古来、誰一人疑ったものはいなかった。コペルニクスもガリレオさえもそうであった。ケプラーは「円」という固定観念にとらわれることなく、彼の師チコ・ブラーエの正確な観測結果をもとに、実際どのような軌道を描くか確かめるという道をえらんだ。

ケプラーは、かねてから惑星の運動は中心にある太陽の作用にもとづく運動であると考えていた。彼の関心は太陽から惑星までの距離 r と惑星の速さ v の係に絞られていた。観測によると、太陽はどうしても円運動の中心にこなかった。彼は惑星が太陽に近づいたときは速く、遠ざかったときは遅く動くと考え、まさにその通りの法則が成り立つことを発見した。(面積速度一定の法則、ケプラーの第2法則)

ケプラーは、地球軌道を決定するために、火星の観測結果を使った。図のようにS（太陽）、E（地球）M（火星）が一直線上にきた時から、はかりはじめる。Mが一周する間（687日）にEは2周

（730日）できずにE₁にくる。このときS、Mの角をはかると△SE₁Mが決まる。同様にして、E₂、E₃…が決まる。Eの軌道は円からわずかにずれた楕円であった。太陽は楕円の焦点の1つにあった。（ケプラーの第1法則）



太陽から遠い星ほど遅くなる（周期が長くなる）という関係は、ついに周期 T の2乗は長半径 a の3乗に比例する法則としてつかまれた。（ケプラーの第3法則）

簡単のために円運動をしているものとして、面積速度一定の法則は、半径を r として

$$rv=c \text{ (一定)} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とかけ、等速円運動していることになる。

$$\text{第3法則は、} T^2 \propto r^3 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

であるが、次のようにもかける。 ($vT=2\pi r$)

$$rv^2=c \text{ (一定)} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

これは、太陽から4倍遠くに惑星があれば、その速度は半分になるという法則である。コペルニクスやガリレオは太陽より遠い星ほど回転速度が遅くなるということを定性的につかんで、地動説の根拠としたのであったが、ケプラーの第3法則はこれを定量的に明らかにするものであった。

話6 万有引力の法則

ここでも簡単のために月が地球のまわりケプラーの第3法則をみたまながら等速円運動をしているものとしよう。月の質量 m 、地球の質量 M 、両者の距離を r とする。

$$\text{月の円運動の加速度 } a=v^2/r=c/r^2 \quad (rv^2=c \text{ より})$$

$$\text{月が地球からうける力 } F=ma=mc/r^2$$

この力は地球の質量 M にも比例するので

$$F = GMm/r^2 \quad (G; \text{比例定数})$$

ニュートンは、この力はすべての天体に働く力であるだけでなく、月とリングとの類似性から、リングと地球との間にも、また、リングとミカンのようなごく普通の地上の物体どうしの間にも、すべてのものに働く力—万有引力—があると考えた。ただ天体の場合は質量が大きいのので大きな力となってあらわれるが、通常の物体は質量が小さいので力も小さく人間の感覚ではそれを気づかないだけだと考えた。自分の隣にすわっている人との間にも万有引力が働いているのである。

キャベンディッシュは鉛の玉どうしの間にも万有引力が働いていることを実験で証明し、比例定数 G の値を測定した。

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ (Nm}^2\text{/kg}^2\text{)}$$

ニュートンの万有引力の発見によって、質量は2重の意味を持つことになった。

{ 慣性の測度としての質量……慣性質量
万有引力の源としての質量……重力質量

また、万有引力の発見によって、天と地は全く同じ法則に支配されていることが明らかとなった。ニュートン力学によれば、慣性質量と重力質量は全く別々に導かれ、偶然一致するものとなっているのであるが、後にアインシュタインはこれらの質量が本質的に同じものだということ—これを《等価原理》とよぶ—を前提にして、一般相対性理論をつくったことをつけくわえておこう。